Estas notas son el complemento de la reunión por meet
No se recomienda usarlas independientemente de esa reunión.

RESOLUCIÓN DE EDP CON C.B. Y/O C.I.

Ejemplo 1

Distribución de calor en barra finita, con laterales aislados y extremos a temp. constante $=0$, con distribución inicial de temp dado por $f(x)$.

A) $k\, u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t) \qquad 0<x<L,\ t>0$

B) $u(0,t)=0 \qquad t>0$

C) $u(L,t)=0 \qquad t>0$

D) $u(x,0)=f(x) \qquad 0<x<L$

A, B, C: homogéneas.

Buscamos soluciones de la forma: $u(x,t)=X(x).T(t)$

$$u''_{xx} = X''.T$$
$$u'_t = X.T'$$

en A): $k X''.T = X T'$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,\ \lambda \text{ constante.}$$

Resultan: $X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad T'(t)+\lambda k T(t)=0$

En B: $X(0).T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0$ (para que sea sol. no nula)

en C: $X(L).T(t)=0 \Rightarrow X(L)=0$

Tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{array}}\ 0<x<L \qquad \boxed{T'(t)+\lambda k T(t)=0}\ t>0$$

EDO con C.B.

Soluciones para EDO con C.B:

si $\lambda<0$: $X(x)=ae^{\alpha x}+be^{-\alpha x}$ ó $X(x)=A\cosh(\alpha x)+B\,\mathrm{senh}(\alpha x)$

$\lambda=-\alpha^2$

$X(0)=a+b=0$ $\quad$ $X(0)=A=0$

$X(L)=ae^{\alpha L}+be^{-\alpha L}=0$ $\quad$ $X(L)=B\,\mathrm{senh}(\alpha L)=0$

$\Rightarrow B=0$

$\Rightarrow a=0$

$b=0$ sol trivial

... no es interesante.

si $\lambda=0$: $X(x)=ax+b$

$X(0)=b=0$

$X(L)=aL=0 \Rightarrow a=0$

sol. trivial.

si $\lambda>0$

$\lambda=\alpha^2$

$X(x)=a\cos(\alpha x)+b\,\mathrm{sen}(\alpha x)$

$X(0)=a=0$

$X(L)=b\,\mathrm{sen}(\alpha L)=0 \Rightarrow \alpha L=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$\alpha=\frac{n\pi}{L}$

Los λ para los cuales existe sol no trivial son $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Para cada λ_n, tenemos solución $X_n(x)=\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

El otro problema:

$$T'(t)+k\lambda T(t)=0$$

$$T'(t)+k\frac{n^2\pi^2}{L^2}T(t)=0 \quad \rightarrow \quad T'(t)=-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}T(t)$$

Sol: $T_n(t)=c\,e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}$

Tenemos soluciones para A,B,C : $u_n(x,t)=\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).e^{-\frac{n^2\pi^2k}{L^2}t}$

Como son homogéneas : $u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2k}{L^2}t}$

A,B,C

también es solución!

y D? $u(x,0) = f(x)$.

en $t=0$, la sol hallada es: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

- Si $f(x)$ es combinación lineal de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ se eligen b_n para que $u(x,0)=f(x)$.

Ejemplo: $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right) - 18\operatorname{sen}\left(\frac{25\pi x}{L}\right)$

tomamos $b_4 = 3$, $b_{25} = -18$, $b_n = 0 \quad n \neq 4, 25$.

- si f no es combinación lineal de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$?

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 k t}{L^2}}}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)\,?$$

?

tomamos b_n: coef de Fourier de f respecto al sistema ortogonal $\{\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

Ejemplo 2. Distribución de calor en barra finita, totalmente aislada, (aún los extremos), con distribución inicial de temp. dada por $f(x)$.

A) $k\,u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t) \qquad 0<x<L,\ t>0$

B) $u'_x(0,t) = 0 \qquad t>0$

C) $u'_x(L,t) = 0 \qquad t>0$ — extremos aislados.

D) $u(x,0) = f(x) \qquad 0<x<L$

A, B, C: homogéneas.

Buscamos soluciones de la forma: $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

~~en A)~~:

como antes llegamos a:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad T'(t) + \lambda k T(t) = 0$$

En B: $u'_x(0,t) = X'(0).T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$

en C: $u'_x(L,t) = X'(L).T(t) = 0 \Rightarrow X'(L) = 0$

Tenemos:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad 0<x<L$$
$$X'(0) = 0$$
$$X'(L) = 0$$

Soluciones para esto...

si $\lambda<0$, $\lambda = -\alpha^2$: $X(x) = A\cosh(\alpha x) + B\operatorname{senh}(\alpha x)$

$X'(x) = \alpha A \operatorname{senh}(\alpha x) + \alpha B \cosh(\alpha x)$

$X'(0) = \alpha B \Rightarrow B = 0$

$X'(L) = \alpha A \operatorname{senh}(\alpha L) = 0 \Rightarrow A = 0$

Sol. trivial.

Si $\lambda = 0$: $X(x) = ax + b$

$X'(x) = a$

$X'(0) = a = 0$ $\rightarrow$ sol no trivial: $X(x) =$

$X'(L) = a = 0$

si $\lambda>0$, $\lambda = \alpha^2$ $\quad X(x) = a\cos(\alpha x) + b\operatorname{sen}(\alpha x)$

$X'(x) = -\alpha a \operatorname{sen}(\alpha x) + \alpha b \cos(\alpha x)$

$X'(0) = \alpha b = 0 \Rightarrow b = 0$

$X'(L) = -\alpha a \operatorname{sen}(\alpha L) = 0 \Rightarrow \alpha L = n\pi$

$\alpha = \frac{n\pi}{L}$, $n \in N$

Soluciones no triviales: con $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 0,1,2,\dots$

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 0,1,2,\dots$$

El otro problema:

$$T'(t) + k \cdot \lambda T(t) = 0$$

$$T'(t) + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot T(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad T_n(t) = c \cdot e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}}$$

Tenemos infinitas soluciones para A,B,C:

$$u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Como A,B,C son homogéneas:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}$$ también es solución.

y D?

$u(x,0) = f(x)$.

~~Si~~ la solución hallada en $t=0$: $u(x,0) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

si f es comb. lineal de $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ se eligen a_n tales que $u(x,0) = f(x)$

si no ...

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}}} \qquad (t \to \infty?)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)?$$

tomamos a_n: coef de Fourier de f respecto al sistema ortogonal $\left\{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad n = 1,2,\ldots \\ a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \end{aligned}}$$

Ejemplo 3

A $\quad k\, u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t) \qquad 0<x<L,\ t>0$

B $\quad u(0,t) = T_1 \qquad t>0$

C $\quad u(L,t) = T_2 \qquad t>0$

D $\quad u(x,0) = f(x) \qquad 0<x<L$

B,C ya no homogéneas (si $T_1 \neq 0, T_2 \neq 0$)

Podemos homogeneizar B y C?

$\boxed{u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)}$ donde φ se hará cargo de lo no homogéneo en B y C

$$u''_{xx} = v''_{xx} + \varphi''$$
$$u'_t = v'_t$$

A) $\quad k v''_{xx} + k\varphi'' = v'_t \quad \rightarrow$ si ~~hacemos~~ pedimos $\varphi''=0$, $v(x,t)$ satisface ecuación calor.

B) $\quad u(0,t) = v(0,t) + \varphi(0) = T_1$

C) $\quad u(L,t) = v(L,t) + \varphi(L) = T_2$

pidamos $\varphi(0)=T_1$, $\varphi(L)=T_2$, $v(0,t)=0 \quad v(L,t)=0$

Entonces:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = 0 \\ \varphi(0) = T_1 \\ \varphi(L) = T_2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} k v''_{xx} = v'_t \\ v(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{(T_2-T_1)}{L}x + T_1} \qquad \boxed{v(x,t) = \sum b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}}$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} + \frac{(T_2-T_1)}{L}x + T_1} \qquad (t\to\infty?)$$

$$u(x,0) = \sum b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \varphi(x) \overset{?}{=} f(x)\ ?$$

b_n: coef de Fourier de $f(x) - \varphi(x)$ respecto de $\left\{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x)-\varphi(x))\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Ejemplo 4

A $\quad k\, u''_{xx}(x,t) + sen\left(\frac{x}{2}\right) = u'_t \qquad 0<x<L,\ t>0$

B $\quad u(0,t)=0$

C $\quad u(L,t)=0$

D $\quad u(x,0)=f(x)$

A no es homogénea.

Proponemos: $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$

$u''_{xx} = v''_{xx} + \varphi''$

$u'_t = v'_t$

en A: $k\, v''_{xx}(x,t) + k\,\varphi''(x) + sen\left(\frac{x}{2}\right) = v'_t(x,t)$

Parece razonable tomar: $k\,\varphi''(x) + sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

así: $k\, v''_{xx} = v'_t$

y además $u(0,t) = v(0,t) + \varphi(0) = 0$ $\rightarrow$ tomemos $\varphi(0)=0$

$u(L,t) = v(L,t) + \varphi(L) = 0$ $\quad \varphi(L)=0$

$v(0,t)=0$

$v(L,t)=0$

Tenemos:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = -\frac{1}{k}\, sen\left(\frac{x}{2}\right) \\ \varphi(0)=0 \\ \varphi(L)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k\,v''_{xx}(x,t) = v'_t(x,t) \\ v(0,t)=0 \\ v(L,t)=0 \end{cases}$$

$$\boxed{v(x,t) = \sum_{1}^{\infty} b_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}}$$

$\varphi'(x) = \frac{2}{k}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + a$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{4}{k}\, sen\left(\frac{x}{2}\right) + ax + b}$$

$\varphi(0) = b = 0$

$\varphi(L) = 4/k\ sen\left(\frac{L}{2}\right) + aL = 0 \ \rightsquigarrow\ a = -\frac{4}{k.L}\, sen\left(\frac{L}{2}\right)$

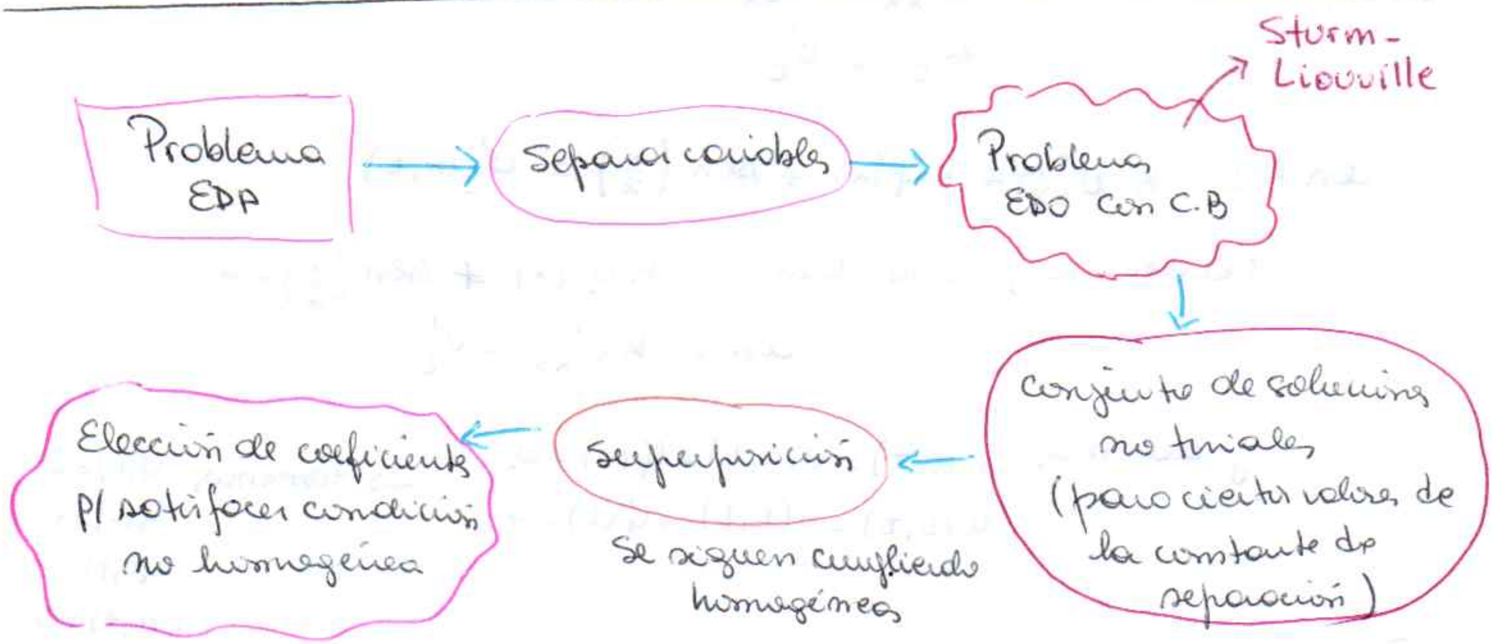
$$\boxed{u(x,t)=\sum_{1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} + \frac{4}{k}\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{-4}{Lk}\right)\text{sen}\left(\frac{L}{2}\right) x}$$

D: en $t=0$:

$$u(x,0)=\sum b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \underbrace{\frac{4}{k}\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{4}{Lk}\,\text{sen}\left(\frac{L}{2}\right) x}_{\varphi(x)} = f(x)\,?$$

tomamos b_n: coef de Fourier de $f(x)-\varphi(x)$ respecto de sistema $\left\{ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x)-\varphi(x)\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}$$



Problema de Sturm-Liouville regular:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left(p(x)\,h'(x)\right)' + q(x)\,h(x) + \lambda w(x)\,h(x) = 0 & x\in[a,b] \\ \alpha h(a) + \beta h'(a) = 0 & \\ \tilde{\alpha} h(b) + \tilde{\beta} h'(b) = 0 & \end{array}}$$

Incógnita: $h(x)$

λ: parámetro

con: $p(x)\in C^1[a,b]$ $\quad p(a)\neq 0$, $p(b)\neq 0$

$q(x)\in C[a,b]$

$w(x)\in C[a,b]$, $\quad w(x)>0 \quad x\in[a,b]$

$h(x)=0$ siempre es solución.

Para qué valores de λ existe solución no trivial?

Observe: si $p=1$, $w=1$, $q=0$ $\quad \alpha=1, \beta=0$
$\tilde{\alpha}=1, \beta=0$

resulta: $h''(x)+\lambda h(x)=0$
$h(a)=0$
$h(b)=0$ → apareció en ejemplo 1

si $p=1, w=1, q=0$, $\alpha=0, \beta=1$
$\tilde{\alpha}=0, \tilde{\beta}=1$

resulta: $h''(x)+\lambda h(x)=0$
$h'(a)=0$ → apareció en ejemplo 2
$h'(b)=0$

Un valor λ para el que existe solución no trivial: autovalor
y dicha solución no trivial: autofunción

Teorema de Sturm-Liouville.

✓ El problema de Sturm Liouville tiene infinitos autovalores
$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ con $\lambda_n \longrightarrow \infty$ si $n \to \infty$.

✓ Cada autovalor tiene asociado un autoespacio de dimensión 1.

✓ Autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales respecto al producto interno

$$\langle h_k, h_j \rangle = \int_a^b h_k(x) \cdot \overline{h_j}(x) \cdot w(x)\, dx$$

✓ Si h_k es autofunción asociada a autovalor λ_k, el conjunto $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal completo!

En el caso: $\begin{cases} h''(x) + \lambda h(x) = 0 \\ h(0) = 0 \\ h(L) = 0 \end{cases}$

autovalores: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$

autofunciones: $h_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

y si $\begin{cases} h''(x) + \lambda h(x) = 0 \\ h'(0) = 0 \\ h'(L) = 0 \end{cases}$

autovalores: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$

autofunciones: $h_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Ejemplo 5

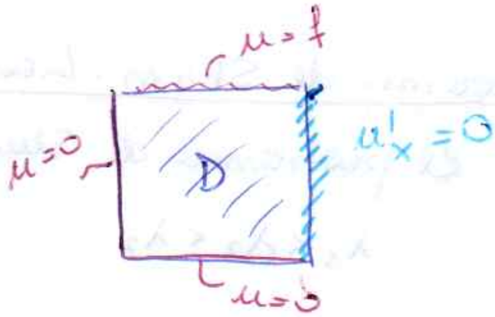
A $\quad u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0 \qquad 0<x<L,\ 0<y<M$

B $\quad u(0,y) = 0 \qquad 0<y<M$

C $\quad u'_x(L,y) = 0 \qquad 0<y<M$

D $\quad u(x,0) = 0 \qquad 0<x<L$

E $\quad u(x,M) = f(x) \qquad 0<x<L$



$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

en A: $X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \quad , \lambda: \text{constante.}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

B: $u(0,y) = X(0) \cdot Y(y) = 0 \quad \Rightarrow X(0) = 0$

C: $u'_x(L,y) = X'(L) \cdot Y(y) = 0 \quad \Rightarrow X'(L) = 0$

D: $u(x,0) = X(x) \cdot Y(0) = 0 \quad \Rightarrow Y(0) = 0$

Resulta: $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$ → un Sturm Liouville con $p = 1, w = 1, q = 0$
$\alpha = 1, \beta = 0$
$\tilde{\alpha} = 0, \tilde{\beta} = 1.$

Soluciones:

si $\lambda < 0$: $X(x) = a \operatorname{senh}(\alpha x) + b \cosh(\alpha x)$
$\lambda = -\alpha^2$ $\quad X(0) = b = 0$
$X'(L) = \alpha a \cosh(\alpha L) = 0 \Rightarrow a = 0$
Sol. trivial.

si $\lambda = 0$ $\quad X(x) = ax + b$
$X(0) = b = 0$
$X'(L) = a = 0$
Sol trivial.

si $\lambda > 0$ $\quad X(x) = a \cos(\alpha x) + b \operatorname{sen}(\alpha x)$
$\lambda = \alpha^2$ $\quad X(0) = a = 0$
$X'(L) = \alpha b \cos(\alpha L) = 0 \quad \Rightarrow \alpha L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad n \in \mathbb{N}$

Autovalores: $\lambda_n = \left[\frac{\pi}{2L}(2n-1)\right]^2 \quad n \in \mathbb{N}$

Autofunciones: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1) \cdot x\right)$ → forman un conjunto ortogonal completo! en $L^2[0,L]$

El otro problema EDO:

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{con: } \lambda = \alpha^2 = \left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)\right)^2$$

$$Y(y) = A \cosh(\alpha y) + B \operatorname{senh}(\alpha y)$$

$$Y(0) = A = 0$$

$$Y(y) = B \operatorname{senh}(\alpha y) = B \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1) y\right)$$

Soluciones de A, B, C, D:

$$u_n(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)y\right)$$

Superposición:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)y\right)}$$

E: con $y = M$:

$$u(x,M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1) \cdot M\right)$$

$$u(x,M) = \sum \underbrace{a_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)M\right)}_{\substack{\text{coef de la S.F. de } f \\ \text{respecto al sistema} \\ \text{ortogonal } \left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ en } [0,L]}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right) \overset{?}{=} f(x)?$$

$$a_n \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)M\right) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right) dx$$